

Grenzwert / Limes

Joachim Penzel

Viele mathematische Probleme besitzen einen hohen Abstraktionsgrad. Daher erschließen sie sich nicht automatisch für Laien. Sie sind zunächst also unanschaulich. Für schulische Lernprozesse bedeutet dies eine enorme Herausforderung.

Die ganze Grundproblematik bzw. Tragik dieser Lernsituation wurde mir auf einer schulinternen Fortbildung in einem niedersächsischen Gymnasium im Jahr 2014 bewusst. Ich bat die anwesenden Mathelehrer mir ein Standardproblem der Gymnasialstufe zu erklären. Sie wählten spontan den Grenzwert und gaben mir in etwa folgende Definition, wie man sie bei Wikipedia und in den einschlägigen Lehrbüchern finden kann:

„Der *Grenzwert* oder *Limes* einer Folge ist eine Zahl, der die Folge beliebig nah kommt. Dies bedeutet, dass in jeder Umgebung des Grenzwerts fast alle Folgenglieder der Folge liegen. Besitzt eine Folge solch einen Grenzwert, so wird sie *konvergent*, andernfalls *divergent* genannt. Die Konvergenz ist ein grundlegendes Konzept der modernen Analysis. In einem allgemeineren Sinne wird es in der Topologie behandelt.“

Durch eine Definition konnte ich aber die Sache nicht verstehen und bat erneut um eine Erklärung. Es folgten verbale Abwandlungen der Definition, die die Sache immer noch nicht erhellten. Acht berufserfahrene Mathelehrer/innen waren also nicht in der Lage, außerhalb einer fachlichen Definition das Grundproblem eines Standardthemas verständlich zu machen.

Ich forderte die Lehrer/innen nun auf, nach Bildern bzw. Geschichten zu suchen, die das Problem veranschaulichen könnten.

Die erklärende Geschichte

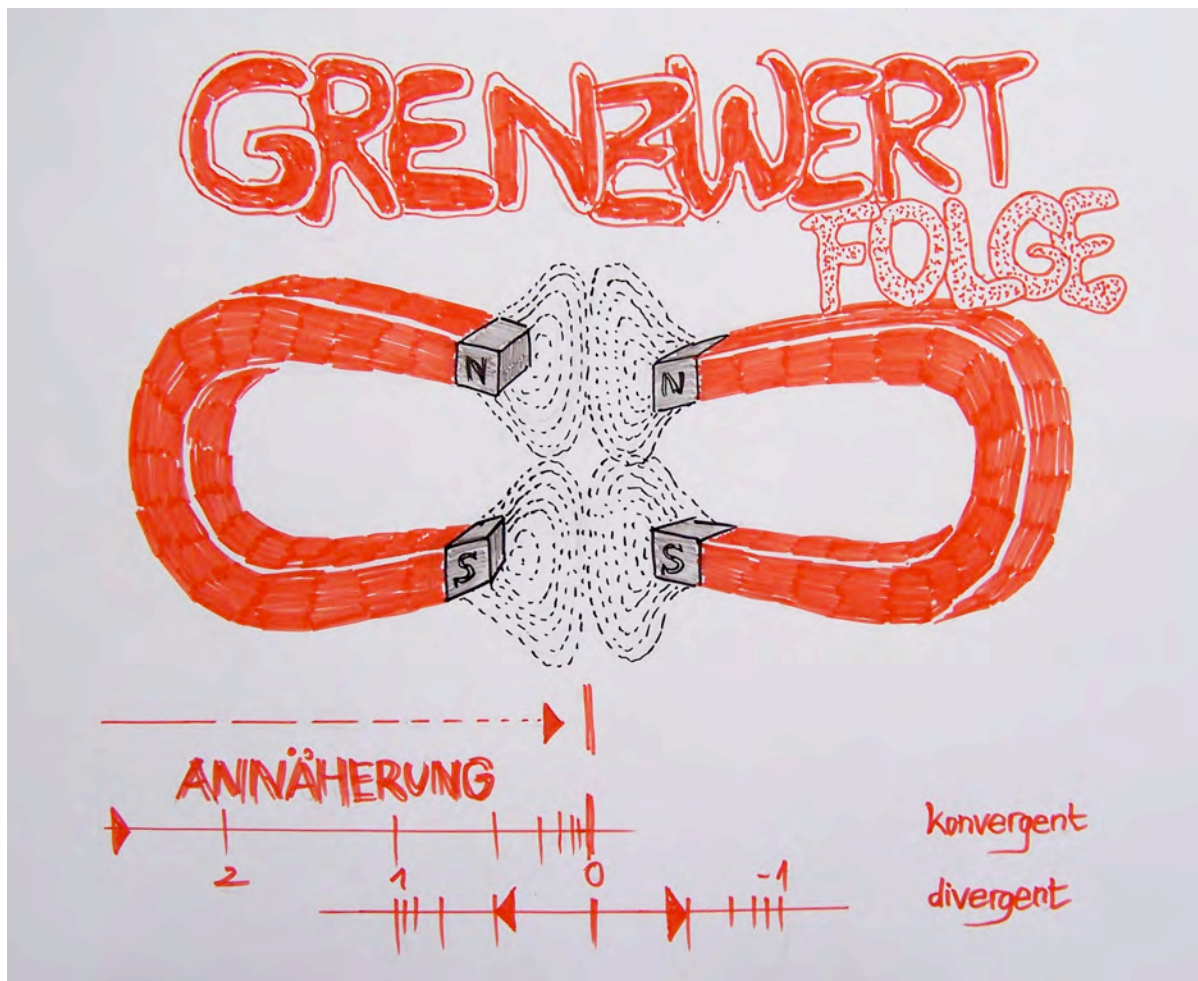
Nach einiger Zeit gab einer der Lehrer folgende Geschichte zum Besten:

Ein Pilot ist mit seinem Flugzeug unterwegs und dabei sternhagelbetrunken. Dadurch ist es ihm nicht möglich, die vorgeschriebene Flughöhe zu halten. Stattdessen zieht er das Flugzeug hoch und runter und fliegt wie auf einer Berg-und-Tal-Bahn. Auf seinem Langstreckenflug beginnt er langsam auszunüchtern, und je klarer er im Kopf wird, desto besser nähert er sich der vorgeschriebenen Flughöhe an. Diese erreicht er jedoch nicht, da er zuvor ans Ziel kommt und zur Landung ansetzt. – Also: Die Flughöhe ist der Grenzwert, dem er sich nähert, diesen aber nicht erreicht.

Wunderbare Geschichte – das Problem der Grenzwertfolge war mir hier erstmals klar.

Das einprägsame Bild

Ein anderer Lehrer erinnerte sich an seine Kindheit. Da hatte er oft mit starken Magneten gespielt. Wenn diese mit gleicher Polung aufeinander zubewegt werden, lassen sie sich zunehmend schwerer bewegen. Bei entsprechender Magnetstärke, ist eine Berührung der Pole nicht möglich. Genauso verhält es sich beim Grenzwert – dieser entspricht im vorliegenden Beispiel die Berührung, diese wird aber nicht erreicht, obwohl man sich ihr nähert. Im Anschluss haben wir folgendes Schaubild entwickelt:

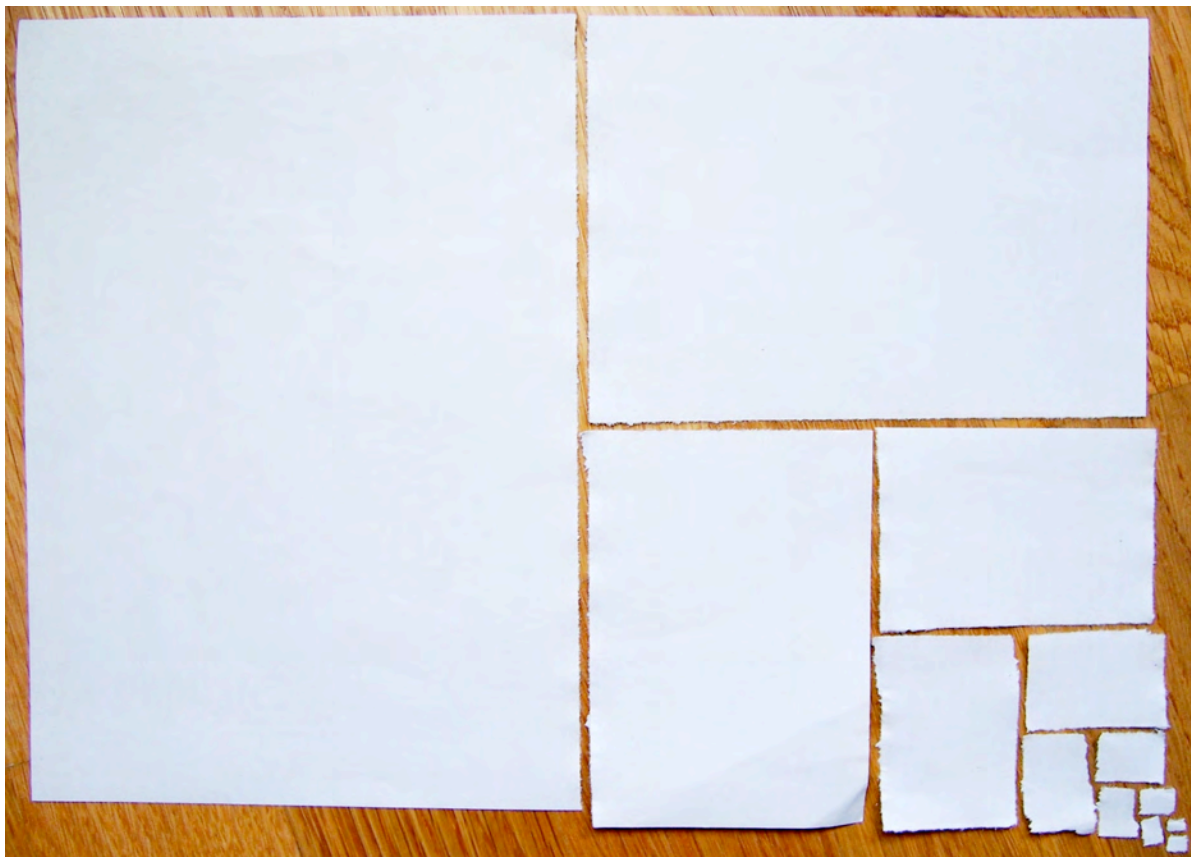


Und eine weitere Lösung >>>

Das anschauliche Experiment

Eine Lehrerin schlug vor, das Grenzwertproblem ihren Schüler/innen durch folgende praktische Aufgabe zu vermitteln: Nehmt ein Blatt Papier und teilt es in der Mitte solange, bis ihr das Unteilbare erreicht habt.

Den Grenzwert (hier das Unteilbare = gr. *atom*) wird gewiss keiner erreichen. Aber die systematische Annäherung an diesen Punkt macht der Zerkleinerungsprozess sehr deutlich.



Ausblick

Solche anschaulichen Erklärungen versteht jeder Laie. Also auf, liebe Mathelehrer/innen, sucht für alle Fachprobleme bitte anschauliche Beispiele, erklärende Geschichten und einprägsame Bilder. Dann werden diese abstrakten Sachen endlich durchsichtig und man kann sich auch Jahre nach dem Abi noch an das jeweilige Problem erinnern, weil man ein Bild dazu im Kopf hat.

erstellt 08/2016